Janet-Systeme und Gröbner-Basen*

Joachim Apel
Mathematisches Institut, Universität Leipzig
Augustusplatz 10-11, D-04109 Leipzig, Germany

28. Mai 1999

1 Einige historische Aspekte

Kaum etwas hat die konstruktive Algebra in den letzten Jahrzehnten so nachhaltig beeinflußt, wie Buchbergers Algorithmus zur Berechnung von Gröbner-Basen. Erst in den letzten 5 bis 10 Jahren wurden Gemeinsamkeiten mit alten Arbeiten Janets im Zusammenhang mit der Lösung von Systemen partieller Differentialgleichungen deutlich.

In meinem Vortrag möchte ich auf Gemeinsamkeiten aber auch Unterschiede beider Ansätze eingehen. Wenigstens aus meiner Sicht, schien ein wesentlicher Unterschied im mathematischen Ursprung beider Algorithmen zu liegen. Während Janet eine effiziente algorithmische Umsetzung von Ideen Riquiers zur Lösung partieller Differentialgleichungssysteme (DGLS) zum Ziel hatte, war Buchberger durch seinen Lehrer Wolfgang Gröbner motiviert worden, nach Algorithmen in endlichdimensionalen Restklassenalgebren zu suchen. Während der Vorbereitungen auf den heutigen Vortrag stieß ich jedoch auf einige Arbeiten Gröbners ([1, 2]), welche belegen, daß Gröbners Interesse am Rechnen in endlichdimensionalen Restklassenalgebren nicht zuletzt ebenfalls der Lösung partieller Differentialgleichungssysteme entsprang.

In den oben genannten Arbeiten untersuchte Gröbner algebraische Eigenschaften von Integralen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Vermöge der wohlbekannten Transformation $x_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}$ lassen sich lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in einer abhängigen Funktion u als Operatoren des zum Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ isomorphen Differentialrings $\mathfrak{D}_m = \mathbb{K}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}]$ angewandt auf u darstellen. Das DGLS entspricht einem Ideal von $\mathfrak{D}_m$ und Gröbner zeigte, wie die (formale) Lösung des DGLS zum Macaulayschen inversen System des Polynomideals korrespondiert.

*Zum ehrenden Gedenken an Wolfgang Gröbner anläßlich seines 100. Geburtstages

Besondere Aufmerksamkeit schenkte er der Untersuchung des Falles von DGLS mit nulldimensionalem zugeordneten Ideal. Offen bleibt an dieser Stelle eigentlich nur die Frage des Berechnens einer Basis und einer Multiplikationstafel des Restklassenringes. Die Konzentration auf den nulldimensionalen Fall liegt sicher nicht zuletzt auch darin begründet, daß die formalen Lösungen nur in diesem Fall auch notwendigerweise analytisch sind.

Diese Frage beschäftigte Gröbner auch fast 25 Jahre später noch, bis sie sein Schüler Buchberger aufgriff und löste ([3]). In den zurückliegenden 30 Jahren wurden für eine Vielzahl von Problemen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie algorithmische Lösungen auf der Grundlage dieses Algorithmus angegeben. Im Grunde ist es erstaunlich, daß Gröbners Ausgangsproblem nicht wieder aufgegriffen wurde.

Betrachten wir nun die Ursprünge des Janet-Algorithmus. Um die Jahrhundertwende bewies Riquier ein Kriterium zur Lösbarkeit von Anfangswertproblemen von Systemen partieller Differentialgleichungen (siehe [4]). Zur Anwendbarkeit des Kriteriums mußte das DGLS eine sehr spezielle Gestalt aufweisen. Sofern es sich nicht um ein widersprüchliches System handelt, was in einer Abhängigkeitsrelation der unabhängigen Variablen deutlich wird, so kann aus dieser Gestalt eine endliche Menge von Initialbedingungen abgelesen werden, bei deren Vorgabe das System eine eindeutige analytische Lösung besitzt. Die prinzipielle Überführbarkeit eines "beliebigen" Systems in die erforderliche Gestalt wies bereits Riquier nach, die algorithmischen Feinheiten wurden in den 20-iger Jahren von Janet gelöst ([5]). Später werden wir noch einmal auf die "Beliebigkeit" des Ausgangssystems zurückkommen müssen, denn um Algorithmen im strengen Sinne zu erhalten, sind durchaus noch einige Einschränkungen nötig. Als Übersichtsartikel über die Riquiersche Methode ist die Arbeit [6] von Thomas zu empfehlen.

2 Allgemeine Divisionsalgorithmen

Wenigstens in der algebraischen Version dienen Janet- und Buchberger-Algorithmus der Division modulo Polynomidealen.

Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit Einselement, $I \subset R$ ein Ideal und F ein Erzeugendensystem von I. Unter einem Divisionsalgorithmus modulo F versteht man eine berechenbare Funktion, welche zu vorgegebenem $a \in R$ Elemente $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n \in R$, $f_1, \dots, f_n \in F$ und $r \in R$ berechnet, so daß

$$a = \sum_{i=1}^{n} q_i f_i p_i + r$$

und r hängt nur von der Restklasse $a + I$ ab.

Praktische Divisionsalgorithmen ähneln oft Termersetzungsalgorithmen. Dabei werden den Elementen des Erzeugendensystems Ableitungsregeln der Gestalt

$$\mathrm{Lt}(f) \to -\mathrm{Rest}(f)$$

zugeordnet. Die Elemente von R müssen sich dazu zunächst in eine Summe $f = \mathrm{Lt}(f) + \mathrm{Rest}(f)$ zerlegen lassen, Grundlage dafür ist im allgemeinen eine Zerlegung der additiven Gruppe von R in eine Summe (unendlich vieler) direkter Summanden. Damit das Termersetzungssystem tatsächlich die an einen Divisionsalgorithmen gestellten Bedingungen erfüllt, muß es sich um ein konfluentes, noethersches Regelsystem handeln und die von der Ableitungsrelation erzeugte Äquivalenzrelation muß mit der Idealkongruenz modulo I zusammenfallen.

3 Gröbner-Basen

Eine allgemeine Möglichkeit der Definition von Gröbner-Basen besteht in folgendem: Wir betrachten ein wohlgeordnetes Monoid[1] $(\Gamma, \prec)$ mit neutralem Element ϵ und einen Γ-gefilterten Ring R mit Filtrierung $\mathcal{F} = (R_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Wir definieren $\hat{R}_\gamma := \{0\} \cup \bigcup_{\omega\prec\gamma} R_\omega$ für $\gamma \in \Gamma$ und $\mathrm{Grad}_\Gamma(a) := \min_{\gamma\in\Gamma}(a \in R_\gamma)$ für $a \in R \setminus \{0\}$.

Der assoziierte graduierte Ring G von R bezüglich der Filtrierung $\mathcal{F}$ ergibt sich in der üblichen Weise als direkte Summe $G = \oplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, mit $G_\gamma := R_\gamma/\hat{R}_\gamma$ und der die Verknüpfung

$$[a + \hat{R}_{\mathrm{Grad}_\Gamma(a)}][b + \hat{R}_{\mathrm{Grad}_\Gamma(b)}] := [ab + \hat{R}_{\mathrm{Grad}_\Gamma(a)\circ\mathrm{Grad}_\Gamma(b)}]$$

homogener Elemente fortsetzenden Multiplikation.

R und sein assoziierter graduierter Ring G sind über die Initialabbildung $\mathrm{In} : R \longrightarrow G$, $\mathrm{In}(0) := 0$ und $\mathrm{In}(a) := a + \hat{R}_{\mathrm{Grad}_\Gamma(a)}$ für $a \neq 0$, sowie einen Schnitt $\mathrm{In}^* : \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma \to R$ von In auf der Menge der homogenen Elemente von G verbunden.

Dann definiert man: Eine $\mathrm{In}(F) = \mathrm{In}(I)$ erfüllende Teilmenge F des Ideals $I \subseteq R$ heist Gröbner-Basis von I.

Ist F eine Gröbner-Basis, so reduzieren genau die Elemente von I mittels des Regelsystems $\mathrm{In}^*(\mathrm{In}(f)) \to -\mathrm{Rest}(f), f \in F$, auf 0. Zur Feststellung der Anwendbarkeit einer Regel wird das zu reduzierende Element der Initialabbildung unterworfen und die Reduzierbarkeit des resultierenden homogenen Elementes modulo $\mathrm{In}(F)$ überprüft. Besitzt $\mathrm{In}(a)$ eine homogene Darstellung $\mathrm{In}(a) = \sum_{i=1}^k u_i \mathrm{In}(f_i) v_i$, dann liefert Reduktion in einem Schritt das Resultat

$$a \to a - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{In}^*(u_i) f_i \mathrm{In}^*(v_i) \ .$$

[1] In jedem wohlgeordneten Monoid ist das neutrale Element stets auch kleinstes Element.

Um einen Divisionsalgorithmus zu erhalten, bedarf es der Repräsentantenunabhängigkeit aller Divisionsreste. Diese erzielt man, indem man einen Divisionsalgorithmus von G zugrundelegt und die Tatsache ausnutzt, daß jedes Element $a \in R$ eine eindeutige Darstellung $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$, wobei $\mathrm{Grad}_\Gamma(r_1) \prec \mathrm{Grad}_\Gamma(r_2) \prec \ldots \prec \mathrm{Grad}_\Gamma(r_k)$ sowie $\mathrm{In}^*(\mathrm{In}(r_i)) = r_i$, als endliche Summe von Elementen des Bildbereiches von In^* besitzt. Der Divisionsrest von a modulo I ist dann das eindeutig bestimmte Element $r \in a + I$, für welches der Initialteil jedes Summanden r_i der obigen Summendarstellung reduziert modulo $\mathrm{In}(I)$ ist.

Sei F ein Erzeugendensystem des Ideals I und $s = \sum_{i=1}^{k} u_i e_i v_i$ eine homogene Syzygie der Initialteile der Elemente von F, d.h. $\sum_{i=1}^{k} u_i \mathrm{In}(f_i) v_i = 0$, alle u_i, v_i sind homogen und alle Summanden $u_i \mathrm{In}(f_i) v_i$ haben den gleichen Grad. In Anlehnung an die Buchbergerschen S-Polynome ordnet man jeder derartigen Initialsyzygie vermöge

$$\mathrm{SPol}(s) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{In}^*(u_i) f_i \mathrm{In}^*(v_i)$$

ein Element von I zu. F ist genau dann eine Gröbner-Basis, wenn $\mathrm{Syz}(\mathrm{In}(F))$ ein homogenes Erzeugendensystem B besitzt, so daß $\mathrm{SPol}(s)$ für jedes $s \in B$ modulo F zu 0 reduziert. Gibt es ein derartiges B, so besitzt auch jede andere homogene Basis des Initialsyzygienmoduls diese Eigenschaft.

Ein Grundprinzip der Theorie der Gröbner-Basen besteht darin, ein Problem in einen assoziierten graduierten Ring zu transformieren, dort zu lösen und dann das Ergebnis in den Ausgangsring zurück zu liften. Die zu lösenden Probleme sind die Entscheidung des Enthaltenseinsproblems und das Berechnen von Syzygienmoduln homogener Ideale. Entsprechende algebraische Methoden stehen häufig zur Verfügung.

Selbst wenn R bereits graduiert ist, so kann man das Problem dadurch weiter vereinfachen, daß man eine feinere als die durch den Grad gegebene Filtrierung betrachtet. So beruhen die klassischen Gröbner-Basen in Polynomringen über einem Körper nicht auf der üblichen $\mathbb{Z}$-Graduierung, sondern auf einer $\mathbb{N}^n$-Graduierung. Die homogenen Ideale bezüglich dieser Graduierung sind gerade die Potenzproduktideale.

Ein bedeutender Teil der Kraft der Gröbner-Basis-Methode beruht auf dem großen Potential, welches sie für Übertragungen auf andere Ringe bietet. So erreicht man eine Übertragung auf Einhüllende von Lie-Algebren bereits dadurch, daß die assoziierten graduierten Ringe mit denen von Polynomringen übereinstimmen. Durch Einsatz der freien Worthalbgruppe als Filtrierungsmonoid können auch "echte nichtkommutative" Ringe untersucht werden.

Es bleibt noch anzumerken, daß nicht alle bekannten Verallgemeinerungen der Gröbner-Basis-Theorie in den Rahmen der hier besprochenen graduierten Strukturen passen. Gruppenringe oder allgemeine Reduktionsringe erlauben im allgemeinen keine geeignete Filtrierung. Die dort vorgenommenen Verallgemeinerungen basieren hauptsächlich auf Termersetzungsideen, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Betrachten wir ein Beispiel für Gröbner-Basen in der freien nichtkommutativen Algebra $\mathbb{Q}\langle x, y, z\rangle$. *I sei das von* $f_1 = xy - y, f_2 = zy - yz - x$ *und* $f_3 = zx - xz$ *erzeugte zweiseitige Ideal. Wir ordnen die Monome zuerst nach ihrem Grad und innerhalb eines Grades lexikographisch. Damit können wir den Erzeugern die Ersetzungsregeln*

$$\begin{aligned} f_1 &: xy \to y \\ f_2 &: zy \to yz + x \\ f_3 &: zx \to xz \end{aligned}$$

zuordnen. Fragen wir nun nach dem Rest von zxy *bei Division modulo* I. *Dazu bilden wir die Ableitungssequenz:*

$$zxy \to^{f_1} z(y) = zy \to^{f_2} yz + x \ ,$$

welche uns auf den Zusammenhang

$$zxy = zf_1 + f_2 + (yz + x)$$

mit irreduziblem Rest $r := yz + x$ *schließen läßt.*

Alternativ hätten wir aber auch die Sequenz

$$zxy \to^{f_3} (xz) \cdot y = xzy \to^{f_2} x \cdot (yz + x) = xyz + x^2 \to^{f_1} (y) \cdot z + x^2 = yz + x^2$$

und die resultierende Divisionformel

$$zxy = f_3 y + xf_2 + f_1 z + (yz + x^2)$$

mit dem irreduziblen Rest $r' := yz + x^2$ *betrachten können.*

zxy *ist das einzige Monom von höchstens drittem Grad, für welches mehrere Ableitungswege und damit verschiedene Divisionsreste auftreten können.* $f_4 := r' - r = x^2 - x$ *liegt in* I. *Nehmen wir nun die Regel*

$$f_4 : x^2 \to x$$

zu unserem Termersetzungssystem hinzu, so gilt $r' \to^{f_4} r$ *und* r *verbleibt als einzig möglicher Divisionsrest von* zxy *modulo* I.

Bezüglich des neuen Termersetzungssystems gibt es zwei neue minimale Monome mit mehreren Ableitungsmöglichkeiten, nämlich x^2y *und* zx^2. *Man stellt aber fest, daß der Ableitungsrest in beiden Fällen nicht vom Ableitungsweg abhängt.* $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *ist eine Gröbner-Basis und das auf ihr beruhende Termersetungssystem erfüllt alle Anforderungen, die wir an einen Divisionsalgorithmus gestellt haben.*

4 Janet-Systeme

Ebenso wie die Potenzprodukte bilden auch die Differentialoperatoren $\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}$ eine zu $\mathbb{N}^m$ isomorphe Halbgruppe. Auf dieser Halbgruppe wird eine monotone, mit der Gesamtableitungsordnung verträgliche Ordnung $\prec$ eingeführt. Ordnet man außerdem noch die abhängigen Funktionen $u_1, \ldots, u_l$, so kann man in jeder Differentialgleichung die bezüglich $\prec$ größte Ableitung der größten Funktion u_j als Hauptableitung der Gleichung auszeichnen. Der Einfachheit halber wollen wir uns im weiteren auf den Fall nur einer abhängigen Funktion $u_1 = u$ beschränken. Mehrere abhängige Funktionen lassen sich analog behandeln, algebraisch entspricht die Untersuchung dann dem Modulfall.

Sei S ein DGLS bestehend aus Gleichungen der Form

$$Du = F\ ,$$

wobei D den zur Hauptableitung gehörigen Differentialoperator bezeichnet. Von den rechten Seiten wird zunächst nur verlangt, daß sie, betrachtet als Funktion in all ihren Variablen, im untersuchten Gebiet in eine Taylorreihe entwickelt werden können. Insbesondere wird weder die Konstanz der Koeffizienten noch die Linearität der Gleichungen verlangt.

Jede Ableitung einer abhängigen Funktion, welche durch Differentiation der Hauptableitung einer Gleichung aus S erreicht werden kann, nennen wir eine Hauptableitung des Systems. Alle anderen Ableitungen heißen parametrisch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß in den rechten Seiten der Gleichungen keine Hauptableitungen auftreten. Seien $D_1 u = F_1$ und $D_2 u = F_2$ zwei Gleichungen mit

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} D_1 u = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}} D_2 u\ ,$$

dann muß jede Lösungsfunktion u von S auch die Gleichung

$$\frac{\partial^n F_1}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} - \frac{\partial^k F_2}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}} = 0$$

erfüllen. Ersetzt man alle in dieser Gleichung auftretenden Hauptableitungen durch parametrische Ableitungen, so gelangt man zu einer Integrabilitätsbedingung des Systems S. Sind alle Integrabilitätsbedingungen Null, so wird S passiv genannt. Besitzt S eine Integrabilitätsbedingung, in der keine parametrischen Ableitungen vorkommen, d.h. die Bedingung stellt eine Relation zwischen den unabhängigen Variablen dar, dann ist S widersprüchlich. Ein passives S ist lösbar.

Genauer gilt folgendes, sei $K_{\delta_1 u}, \ldots, K_{\delta_p u}$ eine endliche Überdeckung der Menge aller parametrischen Ableitungen durch disjunkte Kegel

$$K_{\delta_r u} = \left\{ \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_{k_r}}}{\partial x_{r,j_1}^{i_1}\cdots\partial x_{r,j_{k_r}}^{i_{k_r}}} \delta_r u\ :\ i_1, \ldots, i_{k_r} = 0, 1, 2, \ldots \right\}\ ,$$

hierbei sind $\delta_r u$ eine parametrische Ableitung und $M(\delta_r u) := \{x_{r,j_1}, \ldots, x_{r,j_{k_r}}\}$ eine $\delta_r u$ zugeordnete Teilmenge der unabhängigen Variablen. Dann ist jedes Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
\delta_1 u|_{y=0, \forall y \notin M(\delta_1 u)} &= \varphi_1(x_{1,j_1}, \ldots, x_{1,j_{k_1}}) \\
&\vdots \\
\delta_p u|_{y=0, \forall y \notin M(\delta_p u)} &= \varphi_p(x_{p,j_1}, \ldots, x_{p,j_{k_p}})
\end{aligned}
$$

mit im betrachteten Gebiet analytischen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ eindeutig lösbar.

Die bisher gemachten Aussagen haben rein existentiellen Charakter und folgen aus Sätzen von Riquier ([4]). Bereits Riquier gab jedoch auch Bedingungen an S an, unter denen die Untersuchung nur endlich vieler Integrabilitätsbedingungen ausreicht. Von Tresse war gezeigt worden, daß sich jedes Differentialgleichungssystem in eine solche Gestalt überführen läßt ([7]). Allerdings fehlte bei Tresse der Existenznachweis für die Lösung.

Der grundlegende Konstruktionsgedanke besteht darin, jeder Gleichung eine Menge "multiplikativer" unabhängiger Variablen zuzuordnen. Dabei wird insbesondere gefordert, daß sich jede Hauptableitung von S auf höchstens eine Weise durch Differentiation einer Gleichung nach ausschließlich multiplikativen Variablen gewinnen läßt. S heißt vollständig, wenn es zu jeder Hauptableitung genau eine Möglichkeit der oben beschriebenen Art gibt. Um die Passivität eines vollständigen Systems nachzuweisen, reicht es aus, die Integrabilitätsbedingungen zu überprüfen, bei denen eine Gleichung nach genau einer Variablen und die andere nur nach multiplikativen Variablen abgeleitet wird. Stößt man auf eine von Null verschiedene Integrabilitätsbedingung, welche jedoch wenigstens eine parametrische Ableitung enthält, so löst man die Gleichung nach der höchsten Ableitung auf, nimmt die Gleichung in S auf und beginnt den Test von Neuem. Dabei ist zu beachten, daß sich die Menge der Hauptableitungen vergrößert hat und die Zuordnung der multiplikativen Variablen für alle Gleichungen neu vorgenommen werden muß.

An dieser Stelle kommen wir auf die bereits in der Einleitung erwähnte "Beliebigkeit" des Ausgangssystems zurück. Solange das Auflösen sämtlicher im Laufe der Berechnungen auftretenden Integrabilitätsbedingungen nach ihren höchsten parametrischen Ableitungen algorithmisch möglich ist und die rechten Seiten der dabei entstehenden Gleichungen im betrachteten Gebiet in Taylorreihen entwickelt werden können, kann für das konkrete System auf algorithmischem Weg seine Lösbarkeit festgestellt werden. Das ist zum Beispiel immer der Fall, wenn man sich auf die Betrachtung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschränkt. Im allgemeinen ist diese Auflösbarkeitsbedingung der Integrabilitätsbedingungen jedoch keineswegs erfüllt. Man betrachte beispielsweise $x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy - e^y = 0$, wobei der Nullpunkt zum untersuchten Gebiet gehören soll. Die von Tresse beschriebene Konstruktion zur Überführung eines beliebigen

Differentialgleichungssystems in eine Normalform, ist daher kein Algorithmus im strengen Sinne.

Janets Hauptverdienst besteht in der Angabe einer Zuordnung multiplikativer Variablen, welche oft kleinere vollständige Mengen erlaubt als die in den Beweisen der Sätze Riquiers verwendeten. Darüber hinaus verbesserte er die Effizienz der Vervollständigungsalgorithmen.

Betrachten wir dazu ein einfaches abschließendes Beispiel. Wir starten mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1 &: \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ f_2 &: \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Eine mögliche Zuweisung multiplikativer Variablen ist $X_{f_1} := \{x, y\}$ *und* $X_{f_2} := \{y\}$*. Zu untersuchen ist die Ableitung der Gleichung* f_2 *nach* x*, also* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$*. Reduktion mittels* f_2 *führt auf die neue Gleichung*

$$f_3 \quad : \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Wir setzen $X_{f_3} := \{y\}$ *und lassen* X_{f_1} *und* X_{f_2} *unverändert. Die einzige verbleibende nichtmultiplikative Verlängerung, die Ableitung von* f_3 *nach* x*, führt auf die Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ ,$$

welche aufgrund von f_2 *erfüllt ist. Damit ist das Anfangswertproblem*

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=y=0} = \alpha_1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=y=0} = \alpha_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|_{x=y=0} = \alpha_3, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}|_{x=y=0} = \alpha_4$$

für beliebige analytische Funktionen φ *und beliebige Konstanten* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *eindeutig lösbar.*

5 Abschließende Bemerkungen

Fassen wir zusammen, während sich eine Gröbner-Basis F eines Ideals I durch die Beziehung

$$\mathrm{Lt} I = \bigcup_{f \in F} \mathrm{Lt} f \circ T(X)$$

auszeichnet, erfüllt eine Janet-Basis F die stärkere Forderung

$$\mathrm{Lt} I = \dot{\bigcup}_{f \in F} \mathrm{Lt} f \circ T(X_f) \ .$$

Dabei bezeichnet $T(Y)$, $Y \subseteq X$, das von den Variablen Y erzeugte Untermonoid des von X frei erzeugten kommutativen Monoids. Während die Verallgemeinerung auf andere Monoide für Gröbner-Basen einfach ist, sind die Anforderungen der Janet-Basen an das Monoid äußerst restriktiv, denn die $T(X_f)$ müssen direkte Summanden sein.

Der Buchberger-Algorithmus greift direkt an den minimalen Stellen an, an denen Elemente mit Leittermen außerhalb $\mathrm{Lt}(F)$ entstehen können. Dagegen geht der Janet-Algorithmus schrittweise durch Multiplikation (Prolongation) mit nur einer Variablen vor. Damit wird zunächst versucht $\dot{\bigcup}_{f \in F} \mathrm{Lt} f \circ T(X_f)$ an $\mathrm{Lt}(F)$ anzugleichen. Dennoch werden irgendwann auch die vom Buchberger-Algorithmus bearbeiteten Stellen erreicht, dort erfolgen wiederum die Angleichungen von $\mathrm{Lt}(F)$ an $\mathrm{Lt}(I)$. Besonders in nichtkommutativen Situationen, wo die Multiplikation zweier Monome nicht in konstanter Zeit möglich ist, erscheint der Janet-Algorithmus und seine Weiterentwicklungen eine gute Alternative zum Buchberger-Algorithmus zu sein. Diese Vermutung bezieht sich bereits auf Weyl-Algebren aber mehr noch auf Einhüllende von Lie-Algebren oder Algebren von auflösbarem Typ.

In [8] wurde der Versuch unternommen, die graduierten Strukturen herauszukristallisieren, in denen Gröbner-Basen für beliebige Links-, Rechts- oder zweiseitige Ideale auf algorithmischem Wege berechnet werden können. Ausgangspunkt sind Erweiterungsringe A, die durch Adjunktion endlich vieler Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ zu einem Grundring R entstehen. Dabei wird zunächst weder die Kommutativität von R gefordert, noch ist es erforderlich, daß die α_i mit den Elementen von R vertauschen. Da es sich bei den Ringen A bis auf Isomorphie um Restklassenringe freier Erweiterungsringe von R handelt, läßt sich A durch ein zweiseitiges Ideal I des freien Erweiterungsrings darstellen. In Abhängigkeit der Struktur einer (möglicherweise unendlichen) Gröbner-Basis von I werden Aussagen über die Berechenbarkeit von Gröbner-Basen in A getroffen.

Janets originaler Algorithmus basiert auf einer ganz speziellen Vorschrift zur Bildung der Mengen X_f multiplikativer Variablen. Daneben sind andere Vorschriften von Thomas und Pommaret bekannt. In [9] wird ein allgemeines Konzept zur Zuweisung multiplikativer Variablenmengen entwickelt. Die Gesamtheit der möglichen Zuordnungsvorschriften bildet einen Verband, die Verbandshalbordnung läßt Rückschlüsse auf die Güte der Zuordnungen zu. Die oben genannten klassischen Bildungsvorschriften werden in dieses Konzept eingeordnet und ihre Besonderheiten im Rahmen dieser Theorie aufgezeigt. Die Flexibilität der Zuordnungsvorschrift erlaubt es, die Effizienz der Janetschen Methode weiter zu verbessern.

Literatur

[1] W. Gröbner, Über das Macaulaysche inverse System und dessen Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Abhandl. Math. Sem. d. Hansischen Univ. **12** (1937), 127–132.

[2] W. Gröbner, Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Monatshefte für Mathematik und Physik **47** (1939), 247–284.

[3] B. Buchberger, Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Dissertation, Universität Innsbruck. (1965)

[4] C.H. Riquier, Les systèmes d'equations aux derivées partielles. Gauthier-Villars, Paris. (1910)

[5] M. Janet, Lecons sur les systèmes d'equations aux dérivées partielles. Gauthier-Villars, Paris. (1929)

[6] J.M. Thomas, Riquier's existence theorems. Annals of Mathematics, vol. **30**/2 (1929), 285–310.

[7] A.R. Tresse, Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. Acta Mathematica, vol. **18** (1894), 1–88.

[8] J. Apel, Computational Ideal Theory in Finitely Generated Extension Rings. Informatik-Report 12 (1998), Universität Leipzig. Eingereicht bei *Theoretical Computer Science*.

[9] J. Apel, The Theory of Involutive Divisions and an Application to Hilbert Function Computations. *Journal of Symbolic Computation* **25**, (1998), 683–704.